NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificad@ con nota mínima.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables y formularios
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[10 pts.]** Encuentre $Adj(A)$.

La matriz de Cofactores viene dada por

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & -8 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego la Matriz Adjunta se define como la traspuesta de la matriz de cofactores, y obtenemos

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & -8 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -8 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) **[5 pts.]**Determine A^{-1}.

$A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$. Luego como $|A| = -2$, nos queda que $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -8 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) **[10 pts.]** Si X, matriz de $3x3$, satisface la relación:

$$\left(X^t - \left(A^t B^{-1}\right)^{-1}\right)^t - 2\left(ABA^{-1}\right)^2 = |A|AB^2A^{-1}$$

Determinar la matriz X.

Notar que $\left(ABA^{-1}\right)^2 = ABA^{-1}ABA^{-1} = AB^2A^{-1}$, y como $|A| = -2$ tenemos:

$$\left(X^t - \left(A^t B^{-1}\right)^{-1}\right)^t - 2\left(AB^2A^{-1}\right) = -2\left(AB^2A^{-1}\right)$$

Y nos queda

$$\left(X^t - \left(A^t B^{-1}\right)^{-1}\right)^t = 0$$

$$\left(X^t - B\left(A^t\right)^{-1}\right)^t = 0$$

$$X - \left(\left(A^t\right)^{-1}\right)^t B^t = 0$$

$$X - A^{-1}B^t = 0$$

De dónde concluimos que $X = A^{-1}B^t$. Luego

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Dado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

a) **[15 pts.]** Determine el valor de $\boldsymbol{a}$, de modo que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones y no tenga solución.

El determinante de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 \end{pmatrix}$ es $112 - 7a^2$. Vemos entonces que $|A| \neq 0$ si $a \neq \pm 4$. Luego el sistema tiene solución única si $a \neq \pm 4$.

- Si $a = 4$, la matriz ampliada nos queda $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, y si realizamos operaciones elementales filas podemos llegar a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, lo que nos dice que el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $a = -4$, la matriz ampliada nos queda $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, y si realizamos operaciones elementales filas podemos llegar a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, lo que nos dice que el sistema no tiene solución.

Concluimos que si $a \neq \pm 4$ tenemos solución única, si $a = 4$ tenemos infinitas soluciones, y si $a = -4$ el sistema no tiene solución.

b) **[10 pts.]**Encuentre la solución cuando $\boldsymbol{a} = 2$.

Cuando $a = 2$, la matriz ampliada nos queda $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -10 & 4 \end{pmatrix}$. Si escalonamos llegamos a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{42} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{37}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ donde concluimos que la solución es $x = \frac{41}{42}$, $y = \frac{37}{21}$, y $z = \frac{1}{6}$.

También podemos utilizar el método de Cramer de donde llegamos a que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{82}{84} = \frac{41}{42}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{148}{84} = \frac{37}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

3) **[10 pts.]** Determine el (o los) valor (es) de x de modo que el área del triangulo formado por los puntos $(1,3),(2,5),(x,1)$ sea 4.

El área del triangulo formado por los tres puntos, viene dada por $A_\Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Luego nos queda la ecuación $4 = \pm\frac{1}{2}(-2x)$, de donde concluimos que $x = \pm 4$.